Föreläsning 5

Vi ska fortsätta med deriveringsregler och sen härleda några fler derivator för trigonometriska, exponentialfunktioner samt logaritmer.

Kedjeregeln

Vi vet hur vi deriverar t.ex. x^2, och vi kan genom att utveckla $(x^3+2x+3)^2$ även hitta denna derivata. Vore det inte bra om det fanns en metod för att derivera funktioner som $(x^3+2x+3)^2$ på en gång.

Lösningen är kedjeregeln.

Sats: (Kedjeregeln)

Antag att $f(u)$ är deriverbar i $u=g(x)$, och antag att g är deriverbar i x. Då gäller att

$$(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x).$$

Ex:

Exemplet vi började med var: $(x^3+2x+3)^2$.

Låt $f(u)=u^2$ och $g(x)=x^3+2x+3$, då är

$$f\circ g(x)=(x^3+2x+3)^2.$$

Enligt kedjeregeln så är

$$(f\circ g)'(x)=2\cdot(x^3+2x+3)\cdot(3x^2+2).$$

Anm:

Betakta $(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$

Man brukar kalla $g'(x)$ för den inre derivatan.

Ex:

Då $f(x)=(x^3+2x+3)^2$ så är den inre derivatan given av $3x^2+2$.

<u>Ex:</u>

Betrakta $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+3\sqrt{x}}}{x^2+1}$.

Då är

$$f'(x) = \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+3\sqrt{x}}}\cdot\left(2x+\dfrac{3}{2\sqrt{x}}\right)\cdot(x^2+1) - 2x\cdot\sqrt{x^2+3\sqrt{x}}}{(x^2+1)^2}$$

<u>Ex:</u>

Betrakta $f(x) = \sqrt{\sqrt{x^2+1}+x^3}$.

Då är

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{x^2+1}+x^3}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x + 3x^2\right)$$

<u>Ex:</u>

Betrakta $f(x) = \left(|x^2-1| + 3x^3 + \sqrt{\dfrac{x^3}{|x-1|}}\right)^{3/2}$

Då är

$$f'(x) = \frac{3}{2}\left(|x^2-1| + 3x^3 + \sqrt{\frac{x^3}{|x-1|}}\right)^{1/2}\cdot$$

$$\cdot\left(\operatorname{sgn}(x^2-1)\cdot 2x + 9x^2 + \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x^3}{|x-1|}}}\cdot\left(\frac{3x^2\cdot|x-1| - \operatorname{sgn}(x-1)x^3}{|x-1|^2}\right)\right)$$

Trigonometriska derivator.

Vi ska börja med att härleda derivatan för $\sin x$. Vi har att

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{additionsformel} \\ \text{för sin}}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\sin x\cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} =$$

$$= \sin x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}.$$

Vi måste nu beräkna två gränsvärden.
Vi började med

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

Beviset av detta använder sig av geometriska argument. Vi behöver endast kunna detta gränsvärde, som är ett standardgränsvärde.

Låt oss beräkna

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h}$$

Man har att $\cos h = 1 - 2\sin^2(h/2)$,

eftersom $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$. Detta ger att

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-2\sin^2(h/2)}{h} =$$

$$= -\lim_{h \to 0} \frac{\sin^2(h/2)}{h/2} \underset{\substack{t = h/2 \\ h \to 0 \Rightarrow t \to 0.}}{\overset{}{=}} -\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} \cdot \sin t =$$

$$= -1 \cdot 0 = 0.$$

Detta betyder att

$$\frac{d}{dx} \sin x = \sin x \cdot \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h}}_{=0} + \cos x \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}}_{=1} =$$

$$= \cos x.$$

Alltså är $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$.

Obs:

Eftersom $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ så ger kedjeregeln att

$$\frac{d}{dx}\cos x = \frac{d}{dx}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right).$$

Vidare så gäller att $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$, så

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x.$$

Ex:

Beräkna $\frac{d}{dx}\sin\left(\sqrt{x^3+2x}\right)$. Vi har enligt kedjeregeln att

$$\frac{d}{dx}\sin\left(\sqrt{x^3+2x}\right) = \cos\left(\sqrt{x^3+2x}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^3+2x}}\cdot(3x^2+2).$$

Ex:

Kom ihåg att $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Derivering ger därför att

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos^2 x - (-\sin x)\cdot\sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Trigonometriska ettan}}}{=} \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Snabb repetition av exponentialer och logaritmer.

En exponentialfunktion är på formen $f(x) = a^x$, där a kallas för bas.

Exponentiallagar och egenskaper:

1) $a^0 = 1$

2) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

3) $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$

4) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

5) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

6) $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$

7) Om $a > 1$ så är a^x en växande funktion, medan om $0 < a < 1$ så är a^x en avtagande funktion. Detta ger att

$a > 1$: $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$, $\lim_{x \to \infty} a^x = \infty$

$0 < a < 1$: $\lim_{x \to -\infty} a^x = \infty$, $\lim_{x \to \infty} a^x = 0$.

Def:

Låt $a>0$ och $a\neq 1$. Definiera a-logaritmen genom

$$y=\log_a x \iff x=a^y$$

Obs:

$\log_a x$ är inversen till a^x, dvs

$$\log_a a^x = x \quad \text{och} \quad a^{\log_a x} = x.$$

Logaritmlagar och egenskaper:

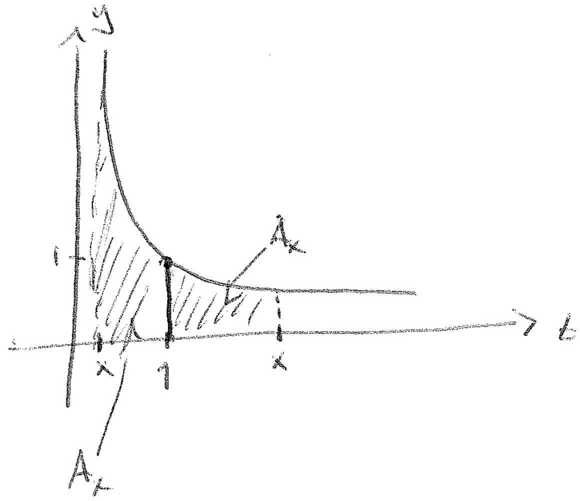
1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$
3. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
4. $\log_a (x^y) = y\cdot \log_a x$
5. $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ (Basbyte).
6. Om $a>1$ så växer $\log_a x$, medan om $0<a<1$ så avtar $\log_a x$. Detta ger att

$a>1$: $\lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} \log_a x = \infty$

$0<a<1$: $\lim_{x\to 0^+} \log_a x = \infty$, $\lim_{x\to\infty} \log_a x = -\infty$.

Definitionen av naturliga logaritmen.

Betrakta grafen till $f(t) = \frac{1}{t}$.



Definiera

$$\ln x = \begin{cases} A_x & ; x \geq 1 \\ -A_x & ; 0 < x < 1 \end{cases}.$$

Per definition så är $\ln 1 = A_1 = 0$.
Vidare så kan man visa att

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}.$$

Egenskaper:

1) $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

Bevis:

$$\frac{d}{dx}\left(\ln(xy) - \ln x\right) = \frac{y}{xy} - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \ln(xy) - \ln x = C$$

för någon konstant $C \in \mathbb{R}$. För $x = 1$ så blir $C = \ln y$.
varvid $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

2) $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$.

Bevis:

Vi har att $\ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x \underset{\text{enl. (1)}}{=} \ln\left(\frac{x}{x}\right) = \ln 1 = 0$

$\therefore \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$.

3). $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

Bevis:

$$\ln\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) \underset{\text{enl. (1)}}{=} \ln x + \ln \frac{1}{y} \underset{\text{enl. (2)}}{=} \ln x - \ln y$$

4). $\ln(x^r) = \ln(\underbrace{x \cdots x}_{r \text{ ggr.}}) \underset{\substack{\text{Enl. (1)} \\ r \text{ ggr.}}}{=} \overbrace{\ln x + \cdots + \ln x}^{r \text{ st}} = r \ln x$.

$\therefore \ln x^r = r \ln x$.

---

5) $\ln x$ växer, så

$$\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty \quad \text{och} \quad \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$$

Den inversa funktionen till $\ln x = y$ är given av $\exp(y) = x$. Dvs

$$\ln \exp(x) = x \quad \text{och} \quad \exp \ln x = x.$$

Egenskaper hos exp:

1) $(\exp x)^n = \exp(nx)$

2) $\exp(x+y) = (\exp x)\cdot(\exp y)$

3) $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$

4) $\exp(x-y) = \dfrac{\exp x}{\exp y}$.

Def:

$$\exp(1) := e.$$

Anm.

Arean under $\frac{1}{x}$ från 1 till e blir 1.

Anm.

$$e \approx 2{,}71828\ldots$$

Vi har även att

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \quad \text{och} \quad \lim_{x\to\infty} e^x = \infty.$$

Vad är derivatan av e^x?

Om

$$y=e^x \Rightarrow x=\ln y.$$

Se nu y som en funktion av x, och derivera.

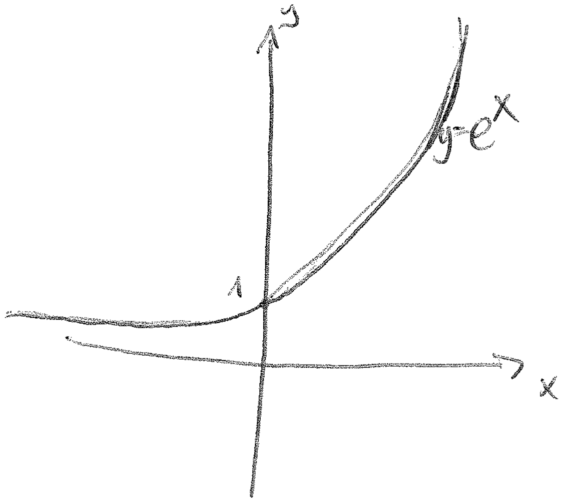
$x=\ln y$:

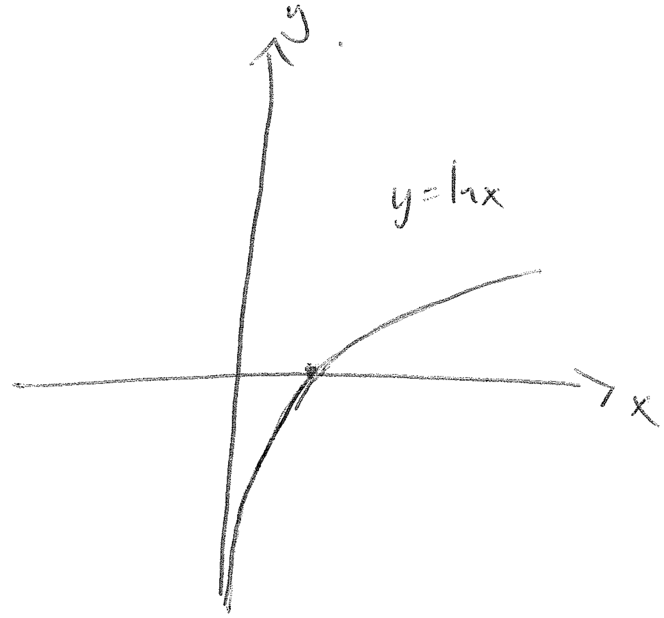
$$1 = \frac{1}{y(x)}\, y'(x) \Rightarrow y(x)=y'(x)$$

Eftersom $y(x)=e^x \Rightarrow y'(x)=e^x$.

Alltså $\frac{d}{dx}e^x = e^x$.

Grafer till $\ln x$ och e^x.





Låt oss göra en ny definition av a^x:

Def

Om $a>0$ så är $a^x = e^{x\ln a}$.

Hur deriverar vi?

$$\frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dx} e^{\ln a^x} = \frac{d}{dx} e^{x \ln a} = \ln a \, e^{x \ln a} =$$

$$= \ln a \cdot a^x.$$

På liknande vis så kan vi derivera $\log_a x$:

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a}.$$

Obs:

Dessa definitioner passar in även då $a=e$

Ex:

Betrakta $f(x)=(g(x))^{h(x)}$ för funktioner g och h. Vad blir då $f'(x)$?

Skriv om $f(x)$:

$$f(x)=(g(x))^{h(x)}=e^{\ln(g(x))^{h(x)}}=e^{h(x)\ln(g(x))}$$

Då blir

$$f'(x)=e^{h(x)\cdot\ln g(x)}\cdot\left(h'(x)\ln g(x)+\frac{h(x)g'(x)}{g(x)}\right)$$

$$=(g(x))^{h(x)}\cdot\left(h'(x)\ln g(x)+\frac{h(x)g'(x)}{g(x)}\right).$$

Ex:

Betrakta $f(x)=e^{3x}\ln x$. Då är

$$f'(x)=3e^{3x}\ln x+\frac{e^{3x}}{x}.$$

Ex:

Betrakta $f(x)=\ln|\sin x|$. Då är

$$f'(x)=\frac{1}{|\sin x|}\cdot\operatorname{sgn}(\sin x)\cdot\cos x.$$